Problème 41: Grossesses et Probas (calculatrice très fortement recommandée) / Difficile

En tombant enceinte exactement 3 fois, et sachant que la probabilité d'avoir un seul enfant est 5 fois plus élevée que celle d'avoir 2 enfants, qui est 5 fois plus élevée que celle d'en avoir 3 (on négligera la probabilité d'en avoir plus, et on considérera qu'une grossesse aboutit forcément à la naissance d'au moins un enfant), quelle est la probabilité d'avoir autant de filles que de garçons ?

Solution:

Pour avoir autant de filles que de garçons, il faut avoir un nombre pair d'enfants. Après 3 grossesses, au moins 3 enfants sont nés, et 9 enfants au maximum seront nés. Pour avoir autant de garçons que de filles, il faut donc avoir 4, 6 ou 8 enfants.

Commençons par calculer la probabilité d'avoir exactement 2 filles et 2 garçons.

Pour avoir 4 enfants en trois grossesses, il faut accoucher 2 fois d'un seul enfant, puis une fois d'une paire de jumeaux.

Soit x la probabilité d'avoir trois enfants en une grossesse.

La probabilité d'avoir deux enfants en une grossesse est donc de 5x, et celle d'en avoir un seul est 25x.

Or, la somme des trois probabilités vaut 1. Donc, 31x=1. Donc, x=1/31

Donc,

$P_1 = 25/31$

$P_2 = 5/31$

$P_3 = 1/31$

La probabilité d'avoir deux grossesses d'un seul enfant puis d'accoucher de jumeaux est donc de: P_2*$(P_1)^2 * 3$= $\frac{9375}{29791}$

Ensuite, en ayant 4 enfants, la probabilité d'avoir exactement 2 garçons et 2 filles est de:

6*$(\frac{1}{2})^4$= ⅜ (cf. Annexe - Loi Binomiale)

Donc, la probabilité d'avoir exactement 2 filles et 2 garçons est de $\frac{9375}{29791}$*$\frac{3}{8}$, donc de $\frac{28125}{238328}$

Ensuite, calculons la probabilité d'avoir exactement 3 filles et 3 garçons.

Pour avoir 6 enfants en trois grossesses, il faut accoucher 3 fois d'une paire de jumeaux, ou accoucher une fois d'un enfant, puis de deux, puis de trois.

Donc, la probabilité d'avoir 6 enfants est de:

$(P_2)^3 + 6 * (P_1 * P_2 * P_3) = \frac{875}{29791}$

Ensuite, en ayant 6 enfants, la probabilité d'avoir exactement 3 garçons et 3 filles est de:

$20*(\frac{1}{2})^6 = 5/16$ (cf. Annexe - Loi Binomiale)

Donc, la probabilité d'avoir exactement 3 filles et 3 garçons est de $\frac{875}{29791}*\frac{5}{16}$, donc de $\frac{4375}{476656}$.

Ensuite, calculons la probabilité d'avoir exactement 4 filles et 4 garçons.

Pour avoir 8 enfants en trois grossesses, il faut accoucher 2 fois d'une paire de triplés, puis accoucher une fois de deux enfants.

Donc, la probabilité d'avoir 8 enfants est de:

$3 * (P_3)^2 * P_2 = \frac{15}{29791}$

Ensuite, en ayant 8 enfants, la probabilité d'avoir exactement 4 garçons et 4 filles est de:

$70*(\frac{1}{2})^8 = 35/128$ (cf. Annexe - Loi Binomiale)

Donc, la probabilité d'avoir exactement 4 filles et 4 garçons est de $\frac{15}{29791}*\frac{35}{128}$, donc de $\frac{525}{3813248}$.

Or, la somme de ces 3 probabilités vaut $\frac{28125}{238328}+\frac{4375}{476656}+\frac{525}{3813248}=\frac{485525}{3813248}$, soit à peu près 12,7%.

Si on admet les probabilités de l'énoncé, on a donc à peu près 12,7% de chance d'avoir autant de filles que de garçons après 3 grossesses.

Annexe - Loi Binomiale:

Les probabilités étiquetées "cf. Loi Binomiale" sont calculés de la façon suivante:

½ (la probabilité d’avoir un genre spécifique), élevé à la puissance du nombre d’enfants, multiplié par le nombre “d’ordres” différents. Par exemple, avoir un garçon puis une fille n’est pas la même chose que d’avoir une fille puis un garçon. Pour calculer la probabilité d’avoir un garçon et une fille en ayant deux enfants, il ne suffit donc pas d’élever ½ au carré, il faut aussi le multiplier par 2, ce qui équivaut à ½.